

EFFECTOS DEL USO DE GEOMETRÍA DINÁMICA SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

EFFECTS OF USING DYNAMIC GEOMETRY ON LEARNING AND ATTITUDE TOWARDS MATHEMATICS

Víctor Linares Gómez
Universidad de Navojoa, México
vlinares@unav.edu.mx
<https://orcid.org/0000-0003-2275-4412>

RESUMEN

*El propósito de este estudio descriptivo y correlacional con diseño pre-experimental fue conocer el efecto del uso de geometría dinámica sobre el aprendizaje y la actitud hacia las matemáticas de 26 estudiantes de preparatoria de la una universidad privada en México, durante el curso 2017-2018. Para los fines del estudio, se administró un pretest y postest de conocimiento acerca de la parábola y una escala de actitud hacia las matemáticas al inicio y al final del tratamiento. Se encontró un efecto positivo y de gran tamaño (según la *d* de Cohen) del uso de geometría dinámica (GeoGebra) sobre el aprendizaje de los alumnos. Esto muestra que, mediante ella, los alumnos pueden aprender conceptos y propiedades de los lugares geométricos; sin embargo, no se logró que los alumnos resolvieran de forma eficaz un problema de aplicación haciendo uso del GeoGebra. Además, se encontró una diferencia significativa entre la actitud favorable hacia las matemáticas antes y después de usar GeoGebra en el proceso de aprendizaje. El crecimiento observado fue desde el 52.8% hasta el 61.4%. Esto indica que el uso de geometría dinámica tiene un efecto positivo sobre la actitud hacia las matemáticas.*

Palabras clave: geometría dinámica, aprendizaje, actitud hacia las matemáticas

ABSTRACT

*The purpose of this descriptive and correlational study with a pre-experimental design was to know the effect of the use of dynamic geometry on the learning and attitude towards mathematics in 26 high school students from a private university in Mexico during the 2017-2018 academic year. For the study, a pretest and posttest of knowledge about the parable and a scale of attitude towards mathematics were administered at the beginning and at the end of the treatment. A large and positive effect (according to Cohen's *d*) of the use of dynamic geometry (GeoGebra) on student learning was found; it shows that, through it, students can learn concepts, and properties of loci;*

however, students couldn't solve an application problem using GeoGebra effectively. Furthermore, a significant difference was found between the favorable attitude towards mathematics before and after using GeoGebra in the learning process. The observed growth was from 52.8% to 61.4%. This finding indicates that the use of dynamic geometry has a positive effect on the attitude towards mathematics.

Keywords: dynamic geometry, learning, attitude towards mathematics

Introducción

Actualmente los alumnos están inmersos en la tecnología, situación que el docente debe emplear para despertar el interés hacia las matemáticas dentro del aula. Cuando los docentes utilizan un software en la enseñanza de algunos temas de matemáticas, el interés de los alumnos por conocer los temas es mayor. No se busca que el uso del software o de las herramientas tecnológicas sustituya los otros recursos didácticos, sino que sea más bien un medio para comprender mejor los temas de geometría y llevar al alumno a un análisis más crítico. Por ello es importante que el docente se involucre en los asuntos tecnológicos para alcanzar a sus alumnos.

De acuerdo con el National Council of Teachers of Mathematics (2003), “los docentes deberían utilizar la tecnología con el fin de mejorar las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que aprovechen lo que la tecnología puede hacer bien y eficientemente (graficar, visualizar, calcular)” (p. 19).

La tecnología en la educación

En el ámbito educacional, el uso de la tecnología llega a generar un ambiente propicio para el proceso de enseñanza aprendizaje de alumnos y docentes. Este ambiente o entorno posee características observables muy significativas, entre las que destacan la facilidad del

trabajo colaborativo, una mayor oferta informativa, la eliminación de las barreras de espacio-tiempo, la promoción del autoaprendizaje, la potenciación de la interactividad y la oportunidad de un aprendizaje más flexible (Hallström y Gyberg, 2011; Wood y Ashfield, 2008).

Al configurar los nuevos entornos y escenarios para la formación, las TIC llegan a ser un recurso más que se encuentra disponible para todo docente. Este recurso se añade a los que ya se estaban usando y no reemplazan necesariamente los recursos anteriores. Además, así deben ver los docentes a las nuevas tecnologías y ser más flexibles con su inclusión dentro del aula (Domingo Coscollola y Marqués Graells, 2011; Opazo Correa, 2008).

Con base en lo anterior, los docentes necesitan la adopción de la tecnología en su labor de enseñanza, cambiar las percepciones que tienen al respecto y vencer las barreras que impiden hacer uso de la tecnología dentro del aula. Para ello es importante identificar cuáles son dichas barreras y superarlas, puesto que no es suficiente tener solo una buena actitud hacia el uso de la tecnología en la enseñanza (Cowan, 2012).

Entre las barreras se encuentran la actitud de los docentes hacia las tecnologías, las ideas que los compañeros de trabajo tengan sobre hacer uso de ellas en el salón de clases, la postura del director con respecto al uso de la tecnología,

las exigencias de los padres y las capacidades y dominio que el docente tenga en el manejo de la tecnología (Pierce y Ball, 2009). Por su parte, Unkefer et al. (2009) consideran que el docente debe tener bien definido el porqué, el cómo y el cuándo hacer uso de las herramientas tecnológicas en su enseñanza.

Las tecnologías educativas están cambiando la forma de brindar educación (O'Brien et al., 2011); incluyen recursos de internet para la enseñanza y aprendizaje, materiales académicos en formato electrónico, software específico de la materia relacionada y software de redes sociales (Juan et al., 2011).

Domingo Coscollola y Marqués Graells (2011) destacan algunos resultados significativos acerca del uso de la tecnología en el aula, como el aumento de atención de parte de los alumnos, mayor comprensión de los temas expuestos y aumento en la participación en el aula, entre otros.

Esto demuestra lo importante que llega a ser la tecnología en la educación en esta nueva era para cumplir con las demandas de la sociedad actual y lo relevante que puede llegar a ser en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La tecnología en las matemáticas

Los dispositivos electrónicos han llegado a ocupar un lugar preponderante en la didáctica contemporánea (Cedillo Ávalos, 2006; McGarr, 2010).

Para Bosch et al. (2011), la tecnología ha generado campos enteramente nuevos en el área de las matemáticas. Los cambios en la era tecnológica, el diseño de nuevos cursos de matemáticas, las formas innovadoras de abordar el contenido de los cursos y el uso de la computadora han producido grandes cambios que han demostrado que la tec-

nología integrada en la enseñanza de las matemáticas produce mejores actitudes hacia el aprendizaje de esta asignatura (Yang y Tsai, 2010).

En el quehacer matemático, diversos contenidos llevan al alumno a experimentar con objetos matemáticos, a ver las relaciones que hay entre ellos y a observar cómo interactúan entre sí (Wood y Ashfield, 2008). Hay lecciones que requieren representaciones visuales (imágenes en movimiento, gráficas, esquemas, figuras geométricas, diagramas) para poder encontrar respuestas a los problemas planteados o dar instrucciones a los estudiantes. Sin la ayuda de la tecnología, estos elementos se presentan en un plano más abstracto.

Mosothwane (2012) y Norton et al. (2000) mencionan que el docente debe estar consciente en cómo usar la tecnología y, sobre todo, analizar cuál es su desempeño en el aula de clases. Considerar los contenidos generales e identificar las dificultades de los alumnos son aspectos que el docente debe tomar en cuenta al utilizar alguna herramienta tecnológica en su enseñanza (Coffland y Strickland, 2004) y no sólo hacer uso de las herramientas tradicionales. Su actitud hacia la incursión de estas herramientas innovadoras motivará a sus alumnos y reforzará contenidos complejos (Maduro et al., 2007).

Asunda (2010) y Castillo (2008) mencionan que, al observar las aportaciones benéficas de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, los docentes deben actualizarse y estar en consonancia con los cambios curriculares que presente el sistema, donde los roles y funciones del profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje se ven modificados debido a los cambios sociales y a sus exigencias.

La tecnología en la enseñanza de la geometría. Los ambientes de aprendizaje enriquecidos por la tecnología propician una mejora en la forma de enseñar geometría, pues la enseñanza tradicional en esta asignatura ha sido rebasada por las necesidades actuales (Mendoza Contreras, 2014).

La tecnología en la enseñanza de la geometría puede llegar a ser una herramienta muy valiosa para el docente, pues permite una mayor comprensión en los temas de parte de los alumnos (Zembat, 2008). La complejidad de estos temas depende en gran medida de los recursos didácticos que el docente utiliza en el proceso de enseñanza aprendizaje. En ocasiones, el alumno solo dibuja figuras geométricas, sin comprender los teoremas fundamentales. En este contexto, debe considerarse la tecnología como una herramienta de trabajo y no considerar como absolutas y únicas las herramientas tradicionales de lápiz y papel.

La enseñanza de la geometría con el uso de software de geometría dinámica puede traer beneficios a los procesos de aprendizaje. Empleándose de una manera responsable, planeada y bien dirigida por el docente, puede generar una actitud reflexiva, analítica y una actitud positiva por el aprendizaje de la geometría.

Las actitudes hacia las matemáticas

Según Rey et al. (2013), las matemáticas son concebidas como “un conjunto de operaciones”, lo cual impide que el alumno tenga una actitud positiva al momento de realizar tareas que requieren pensar. Por lo tanto,

la predisposición negativa hacia las matemáticas, las acciones del profesor, la tradición social o la creencia de que las matemáticas son un cono-

cimiento para unas pocas personas de condiciones cognitivas superiores, son factores que inciden en la reacción emocional del estudiante, que se manifiesta como insatisfacción y frustración. (p. 284)

Las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas están íntimamente relacionadas con sus habilidades y capacidades para resolver problemas de los temas vistos en clase y, por ende, con su rendimiento académico. Por esta razón, se deben determinar cuáles son estas debilidades e incapacidades y planificar cómo eliminarlas. Los profesores de matemáticas deben utilizar diferentes métodos, actividades o proyectos y diferentes técnicas de enseñanza en sus clases y las actividades de enseñanza deben abordar las debilidades de los alumnos (Yavuz Mumcu y Cansiz Aktas, 2015).

Por su parte, Avci et al. (2015) mencionan que las actitudes de los alumnos hacia las clases de matemáticas mejoran cuando se hace uso de las herramientas tecnológicas; además, mejoran sus creencias, confianza y sentimientos hacia ella y generan cambios positivos en el aspecto cognitivo. La tecnología también ofrece oportunidades únicas para que los estudiantes creen y comuniquen su conocimiento.

Montero et al. (2015) consideran que el primer paso que deben dar los docentes para poder llevar a cabo modificaciones en la práctica pedagógica, y así tomar decisiones que influyan positivamente en los procesos de aprendizaje de los alumnos, es conocer sus actitudes hacia el tema de la asignatura en particular y hacia la formación matemática en general.

Estrada Roca y Díez Palomar (2011) resaltan la importancia del dominio

afectivo al enfrentarse a un problema matemático; este viene a ser un mediador y juega un papel importante desde que el estudiante lee la actividad y trata de entender el problema para comenzar a resolverlo. Mencionan, además, que la actitud con la que se presente el problema puede determinar de manera significativa el resultado al que finalmente se llega y si se es capaz o no de encontrar solución.

López et al. (2013) estudiaron acerca de la relación entre las actitudes que tienen los estudiantes hacia las matemáticas y el uso de la tecnología que se emplea en su enseñanza y observaron “que, al trabajar temas de matemáticas con el apoyo de la tecnología, aumenta notablemente la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas, registrándose además un cambio positivo en las actitudes hacia esta materia” (p. 33). Al hacer uso de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, existe una tendencia positiva hacia ellas. Por esa razón, se considera importante la implementación de herramientas tecnológicas como un recurso didáctico en las clases, tomando como referencias las correlaciones positivas entre las actitudes hacia las matemáticas y el uso de la tecnología.

El uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas es una característica importante dentro de la educación, por lo cual el presente estudio tuvo el propósito de conocer cuál era el efecto del uso de geometría dinámica en el aprendizaje y la actitud hacia las matemáticas de los estudiantes de preparatoria del segundo semestre de un colegio privado de Sonora, México, durante el periodo enero a mayo de 2017.

El uso de la tecnología ha permeado

las diferentes áreas de la sociedad, entre ellas la educación. En el área de las matemáticas, brinda ayuda para visualizar los conceptos abstractos, permitiendo al alumno manipular los elementos de ciertas variables y analizar sus comportamientos.

Partiendo de esto, es necesario que en esta investigación se identifiquen las ventajas de incluir en la enseñanza de la geometría el uso de la tecnología, haciendo énfasis en la utilización de un software educativo.

Método

Esta investigación tuvo un enfoque cuantitativo, descriptivo y correlacional, con un diseño pre-experimental.

Participantes

Participaron de esta investigación 26 alumnos del segundo curso de un colegio privado de Sonora, México, durante el semestre enero a mayo de 2017.

Instrumentos

Actitud hacia las matemáticas. Para medir la actitud hacia las matemáticas, se utilizó la escala Actitud hacia las Matemáticas, elaborada por Gómez Martínez (2012), que evalúa los aspectos cognitivos, afectivos, conductuales y valorativos. Esta es una escala validada por el método de los grupos extremos y por el método de correlación ítem-test. El instrumento consta de 34 ítems, valorados en una escala Likert, que va de uno a cinco de la siguiente manera: (a) *totalmente de acuerdo*, (b) *de acuerdo*, (c) *no sabe o no puede responder*, (d) *en desacuerdo* y (e) *totalmente en desacuerdo*. Se obtuvo un alfa de Cronbach de .929 en el pretest y .883 en postest. Estos valores obtenidos están dentro del margen aceptable.

Rendimiento académico. Para medir el rendimiento académico se elaboró un examen de conocimiento sobre la parábola, el cual midió el conocimiento en una escala de 0 a 30 puntos; se contempla la ubicación de los elementos de la parábola, identificación de los elementos a partir de una ecuación dada y un problema de aplicación. En el instrumento para medir el conocimiento de la parábola, se obtuvo un alfa de Cronbach de .611 en el pre test y .707 en el postest.

Tratamiento

Con el uso de GeoGebra se abordaron los elementos y ecuaciones de la parábola, que corresponde al bloque VI de Matemáticas III de los programas de estudio de bachillerato general.

Antes de realizar las actividades propias del tema, se llevó a cabo una capacitación en el uso de GeoGebra, con la finalidad de que durante el desarrollo de las actividades en clases, los alumnos se sintieran seguros en cuanto al manejo del programa y así ejecutaran las actividades de forma eficaz. La capacitación duró tres sesiones en horario extra-clase, con una duración de una hora cada sesión. Las sesiones se programaron días antes de abordar el tema. Durante las sesiones se les asignaron ejercicios, con el fin de que los estudiantes se familiarizaran con el programa y se llevara a cabo una retroalimentación de conceptos.

Actividades con el uso de GeoGebra

A continuación, se describen las actividades que se realizaron como tratamiento en la investigación.

Actividad 1. En esta actividad se pretendió reforzar el concepto de parábola como lugar geométrico e identi-

car sus elementos por medio de la exploración y manipulación del software de geometría dinámica. Previamente se solicitó al alumno que realice una investigación acerca del concepto de parábola y sus aplicaciones prácticas.

Según Lehmann (2008), una parábola es

el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. (p. 149)

A partir de esta premisa, se desarrolla esta primera actividad. El alumno realizó los siguientes pasos proporcionados por el docente: (a) ubicar un punto F en el plano y trazar una recta L a cualquier distancia del punto F, y sobre ella colocar un punto A; (b) trazar una recta perpendicular a L y que pase por el punto A; (c) trazar el segmento AF, posteriormente su mediatriz; (d) encontrar la intersección entre la recta perpendicular y la mediatriz, y nombrarlo C (ver Figura 1); (e) ocultar la recta de la mediatriz y la perpendicular; (f) activar el rastro de C y desplazar el punto A sobre la recta L (ver Figura 2); y (g) guardar la ventana de trabajo.

Figura 1
Intersección (punto C) entre la mediatriz del segmento AF y la recta perpendicular a la recta L

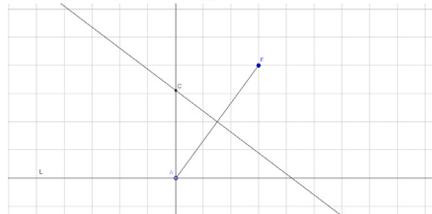


Figura 2

Rastro del punto C, al desplazar el punto A sobre la recta L



Una vez realizado cada uno de los pasos, el alumno respondió los siguientes cuestionamientos: ¿Cuál es la medida del segmento AC y CF? ¿Cómo son entre sí estos segmentos? ¿Cumple con la definición de parábola descrita por Lehmann? ¿Cómo cambian los segmentos AC y CF?

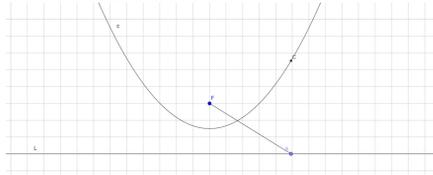
Actividad 2. En esta actividad se buscó que el alumno definiera cada uno de los elementos de la parábola, a partir de las características que observó al hacer uso de GeoGebra. Los pasos que se realizaron en la actividad 2 fueron los siguientes: (a) buscar y abrir el archivo guardado de la actividad 1; (b) partiendo de los trazos ya realizados, seleccionar el botón de parábola a partir del punto F y la recta L y trazar la parábola, manipular la posición tanto de la recta como del punto F y observar lo ocurrido (ver Figura 3).

Realizados estos dos pasos, se identificó a F como foco de la parábola y a L como directriz, siendo estos los dos primeros elementos que el estudiante tuvo que definir, de acuerdo con las características que observó. Posteriormente, se continuó con los siguientes pasos: (a) trazar un segmento que mida la distancia entre el foco (F) y la directriz (D) y encontrar la intersección del segmento con la parábola y nombrarlo V (vértice) y dar la defini-

ción de vértice; (b) trazar el segmento VF, nombrarlo P y calcular su medida; compararlo con la distancia de V a la directriz, desplazar el foco (F) y observar qué sucede con el segmento P y la distancia del vértice a la directriz. ¿Sucederá así en todas las parábolas o habrá alguna donde no se cumpla esta característica? (ver Figura 4). Anotar conclusiones e identificar el valor de P a partir de la distancia entre el foco y la directriz.

Figura 3

Construcción de la parábola a partir de icono de GeoGebra



Continuando con la actividad 2, el alumno realizó los siguientes procedimientos: (a) trazar una recta paralela a la directriz y que además pase por el foco y encontrar los puntos de intersección entre ella y la parábola; llamar a cada intersección R1 y R2, respectivamente. Posteriormente, ocultar la paralela a la directriz; y (b) medir el segmento que une los puntos R1 y R2 y llamarlo lado recto (LR) (ver Figura 5).

Figura 4

Comparación entre la distancia foco-vértice y vértice-directriz

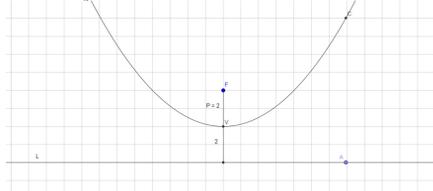
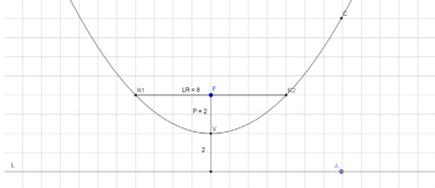


Figura 5
Trazo del lado recto de la parábola



Una vez realizados los pasos anteriores, el alumno escribió la definición de lado recto y describió la relación entre el lado recto (LR) y la distancia del vértice al foco (segmento P).

Concluida esta actividad, el alumno ubicó y señaló cada uno de los elementos de la parábola para ser realizada en GeoGebra. Después, se le asignó la siguiente actividad: “Construye las siguientes parábolas a partir de los elementos dados. Las coordenadas de los extremos del lado recto son R1 (2,1) y R2 (-2,1); Foco (5/2, 0), directriz ($x = 4$) y directriz ($y = 7/2$)”. De esta manera, se buscó abordar el concepto de la parábola y de sus elementos.

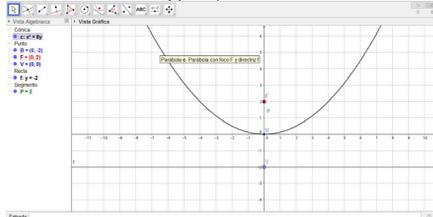
Actividad 3. De acuerdo con los conocimientos previos, acerca de la construcción de una parábola mediante GeoGebra y la identificación de sus elementos, el alumno realizó lo siguiente: (a) construir una parábola vertical con centro en el origen tal como se muestra en la Figura 6 y (b) cambiar el color de la gráfica para identificarla de acuerdo con su ecuación.

Una vez realizado lo anterior, el alumno analizó la gráfica y su ecuación, respondiendo las siguientes preguntas: “¿Qué relación existe entre el valor del coeficiente de “y” y el valor de “P” (distancia del vértice al foco)? ¿Cómo crees que el coeficiente afecta a la gráfica?”

En las conclusiones, el docente presentó a los alumnos una ecuación ($x^2 =$

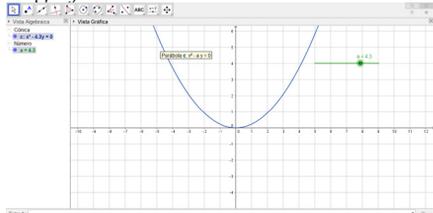
$4py$), como la ecuación ordinaria de la parábola vertical, con vértice en el origen. El alumno verificó su respuesta anterior con el siguiente procedimiento: (a) abrir una ventana nueva y agregar un deslizador de nombre “a” y colocarle un valor mínimo de -10 y máximo de 10 (ver Figura 7); (b) ingresar la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen, reemplazando el coeficiente “4p” por “a” (ver Figura 7) y (c) interactuar con el deslizador y observar lo ocurrido.

Figura 6
Gráfica de la parábola vertical con centro en el origen y su ecuación



Posteriormente, el alumno respondió las siguientes preguntas: (a) ¿qué sucede si el coeficiente “y” es positivo?, (b) ¿qué sucede si el coeficiente “y” es negativo?, (c) ¿qué sucede si el coeficiente “y” es cero? y (d) ¿qué le ocurre a la gráfica si el coeficiente “y” continúa incrementando o disminuyendo?

Figura 7
Deslizador “a”, ecuación ordinaria de una parábola con vértice en el origen y su gráfica



Una vez respondidas las preguntas anteriores, se proporcionaron al estudiante ecuaciones de parábolas verticales con vértice en el origen, esperando que, aun sin graficarlas, pueda predecir si estas abren hacia arriba o hacia abajo. Posteriormente, se le pidió que graficara las ecuaciones y encontrara sus elementos.

Actividad 4. En esta actividad se desarrolló algo similar a la actividad tres, con la variante de que ahora la parábola sería horizontal y en las conclusiones el docente presentó la forma de la ecuación ordinaria de la parábola horizontal con vértice en el origen ($y^2 = 4px$).

Actividad 5. Con esta actividad se buscó que el alumno, en GeoGebra, pudiera manipular las ecuaciones de las parábolas con vértice en el origen, restando o sumando valores a las variables y observando el comportamiento de las gráficas, logrando visualizar que los valores añadidos a las variables correspondieran a las coordenadas del vértice de la parábola. De esta forma se buscó abordar el subtema de ecuación ordinaria de parábolas verticales y horizontales con vértice fuera del origen. El procedimiento que se realizó fue el siguiente:

1. Reescribir la ecuación ($x^2 = 4py$), restándole un valor h a la variable x antes de elevarla al cuadrado, sustituyendo $4p$ por a y restando un valor k a la variable y , resultando otra ecuación $(x - h)^2 = (a)(y - k)$. El programa automáticamente solicita crear deslizadores para las variables a , h y k .

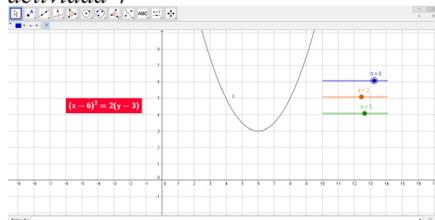
2. Aceptar la creación de los deslizadores.

3. Cambiar las propiedades de los deslizadores, asignándoles valores mínimos de -10 y máximos de 10 y un incremento de 1. Modificar el color de cada deslizador.

4. Insertar un texto, en el cual se escribe la ecuación ingresada en el primer paso, con la consigna de que, al colocar las variables a , h y k , se seleccionan los puntos correspondientes en la vista algebraica en lugar de escribir la letra; esto crearía una relación entre el texto y los valores de cada variable mencionada.

Se cierra la vista algebraica y se modifican las propiedades del color y tipo de letra del texto para una mejor claridad. Los pasos realizados en esta actividad pueden apreciarse en la figura 8.

Figura 8
Vista final de los pasos realizados en la actividad 4



Una vez realizado lo anterior, el alumno movió los botones de los deslizadores y observó lo que ocurre con la gráfica; posteriormente, respondió las siguientes preguntas: ¿qué sucede con la gráfica si el valor de a es cero?, ¿qué sucede con la gráfica si el valor de h es cero? y si h es un número cualquiera positivo, ¿qué ocurre con la gráfica al cambiar los valores de h ?, ¿qué sucede con la gráfica si el valor de k es cero? y si k es un número cualquiera positivo, ¿qué ocurre con la gráfica al cambiar los valores de h ? Los valores h y k , ¿a qué elemento de la parábola corresponden?

Una vez dadas las conclusiones por el docente, se proporcionaron a los alumnos ecuaciones ordinarias de la parábola con vértice fuera del origen, para que sin graficar pudieran predecir los

elementos de la parábola y realizar un bosquejo. Posteriormente, graficaron en GeoGebra las ecuaciones para corroborar sus resultados.

Actividad 6. En la actividad 6 se pretendió que se repitiera la actividad 5, pero ahora usando otra ecuación ($y^2 = 4px$), para que el alumno visualizara tanto parábolas verticales como horizontales con vértice fuera del origen, de tal manera que, al observar una ecuación, supiera que se trataba de una parábola horizontal o vertical y fuera capaz de identificar algunos elementos sin graficarla.

Resultados

Análisis descriptivo

La variable conocimiento de la parábola se midió en una escala de 0 a 37; en el pretest, obtuvo una media de 2.07 ($DE = 1.89$), mientras que en el postest se obtuvo una media de 17.42 ($DE = 5.03$) (ver Tabla 3). El coeficiente de asimetría en el pretest fue de 0.835, mientras que en el postest de -0.195; el valor de la curtosis fue de -0.614 para el pretest y de -0.546 en el postest; estos valores están en el rango de una distribución normal.

Tabla 3
Comportamiento de la variable conocimiento de la parábola, pretest y postest

Prueba	M	Error estándar de la media	DE	Asimetría	Curtosis
Pretest	2.08	.372	1.896	.835	-.614
Postest	17.42	.988	5.037	-.195	-.546

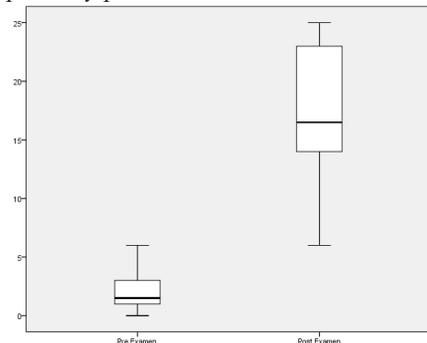
En el pretest, el puntaje mínimo registrado fue de 0 puntos y el máximo de 6 puntos, mientras que en el postest, el puntaje mínimo registrado fue de 6 puntos y el máximo de 25 puntos. El puntaje máximo registrado en el pretest fue el mínimo registrado en el postest; esto muestra evidencia de incremento de la variable conocimiento de la parábola (ver Figura 9).

Al comparar cada ítem del pretest y del postest, se encontró que en el pretest el ítem 2 “ubicación del vértice” resultó el de mayor promedio entre los estudiantes, con una media de 0.58 ($DE = 0.50$). Se registraron, además, ítems en los cuales la media fue de cero puntos (ítems 7 a 17, 20 y 21), lo cual indica que, entre todos los estudiantes, ninguno contestó correctamente esos ítems, o bien, no respondieron.

En el postest, no hubo error en los ítems 2, ubicación del vértice, y 4, ubi-

cación del foco. Es decir, fueron contestados correctamente por todos los alumnos. Cabe señalar que los ítems del 2 al 6 fueron evaluados en una escala de 0 y 1, mientras que el resto tuvo una escala del 0 al 2.

Figura 9
Diagrama de caja y bigotes de la variable conocimiento de la parábola del pretest y postest



Los ítems con mayor promedio después del 2 y del 4 fueron el 7, coordenada del vértice 1 y 8, longitud del lado recto 1, con una media de 1.92 y con una desviación estándar de .392, en ambos ca-

sos. El único ítem con una media igual a 0 fue el 20, altura del foco respecto a la base. La información de la media y la desviación estándar de todos los ítems pueden observarse en la Tabla 4.

Tabla 4

Estadísticos descriptivos de los ítems de la variable conocimientos de la parábola

Reactivo	Pretest		Postest	
	M	DE	M	DE
1. Concepto matemático de parábola	0.04	0.196	0.58	0.70
2. Ubicación del vértice	0.58	0.504	1.00	0.00
3. Ubicación de la directriz	0.27	0.452	0.92	0.27
4. Ubicación del foco	0.38	0.496	1.00	0.00
5. Ubicación del lado recto	0.27	0.452	0.81	0.40
6. Ubicación del eje de la parábola	0.38	0.496	0.73	0.45
7. Coordenada del vértice 1	0.00	0.000	1.92	0.39
8. Longitud del lado recto 1	0.00	0.000	1.92	0.39
9. Valor de p 1	0.00	0.000	1.88	0.43
10. Coordenada del foco 1	0.00	0.000	1.54	0.86
11. Ecuación de la directriz 1	0.00	0.000	0.85	1.01
12. Coordenada del vértice 2	0.00	0.000	1.15	1.01
13. Longitud del lado recto 2	0.00	0.000	0.88	0.99
14. Valor de p 2	0.00	0.000	0.92	1.02
15. Coordenada del foco 2	0.00	0.000	0.50	0.86
16. Ecuación de la directriz 2	0.00	0.000	0.19	0.57
17. Ecuación del arco parabólico	0.00	0.000	0.12	0.43
18. Altura que alcanza el arco respecto al suelo	0.08	0.392	0.15	0.54
19. Medida de la base	0.08	0.392	0.27	0.67
20. Altura del foco respecto a la base	0.00	0.000	0.00	0.00
21. Coordenas de los extremos del lado recto	0.00	0.000	0.08	0.27

Actitud hacia las matemáticas

La variable actitud hacia las matemáticas se midió en una escala del 34 al 170. Se obtuvo una media de 105.81 (52.8% de la escala) y una desviación estándar de 20.94 en el pretest, mientras que en el postest la media fue de 117.62 (61.4% de la escala), con una desviación estándar de 17.19. El valor mínimo

registrado en el pretest fue de 78 y el máximo de 145, mientras que en el postest fue de 80 y 159, respectivamente; esto muestra un incremento en la variable (ver Figura 10).

Análisis correlacional

Para determinar si el uso del software de geometría dinámica (GeoGebra) tuvo

un efecto positivo en la actitud hacia las matemáticas, se utilizó la prueba t de Student para muestras pareadas cuyo resultado fue menor a .05 ($t(25) = 3.599, p = .001$). El tamaño del efecto que se registró en la variable actitud, según la d de Cohen, fue de .616, considerado un efecto medianamente importante. Se analizaron los cuatro componentes de la variable actitud hacia las matemáticas en el pretest y el postest: afectivo, valorativo, conductual y cognitivo. Se comparó cada componente del pretest y del postest. Se puede observar en la Tabla 5 que, en cada caso, hubo un incremento en su media; el componente cognitivo fue el que presentó un mayor crecimiento; sin embargo, tanto en el pretest como

en el postest, el componente con el mayor porcentaje fue el componente valorativo.

Figura 10

Diagrama de caja y bigotes de la variable actitud hacia las matemáticas, pretest y postest

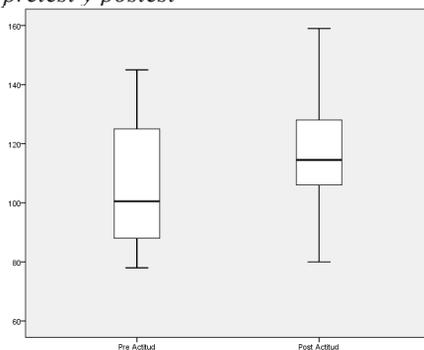


Tabla 5

Comportamiento de los componentes de la variable actitud en el pretest y el postest

Componente	Test	M	DE	%
Afectivo	Pretest	42.88	10.191	46.46
	Postest	48.19	8.895	55.32
Cognitivo	Pretest	15.92	3.123	54.60
	Postest	18.38	2.699	66.90
Conductual	Pretest	26.69	5.424	58.41
	Postest	28.96	4.359	65.50
Valorativo	Pretest	20.31	4.873	79.50
	Postest	22.08	4.069	88.89

Respecto al uso de software de geometría dinámica (Geogebra) y el aprendizaje de la geometría, el nivel de significación de la prueba t de Student para muestras pareadas fue menor a .05 ($t(25) = 16.361, p = .000$). Esto indica que el uso de la geometría dinámica (GeoGebra) tiene un efecto positivo en el aprendizaje de la geometría en el tema de la parábola. El tamaño del efecto medido

con la d de Cohen fue muy importante ($d = 4.031$).

Discusión

Los resultados de la presente investigación indican que el uso de software de geometría dinámica tuvo un efecto positivo sobre el aprendizaje de la geometría y en las actitudes hacia las matemáticas en alumnos de segundo

semestre de preparatoria de un colegio privado de Sonora. Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Bhagat y Chang (2014), quienes llevaron a cabo un estudio con 50 estudiantes divididos en dos grupos, control y experimental, quienes recibieron la enseñanza de forma tradicional (papel y lápiz) y con el uso de GeoGebra, respectivamente. El tema que abordaron fue el de ángulos inscritos y centrales en una circunferencia. Se observó que el grupo experimental presentó una mayor puntuación y una mejora en el razonamiento y la visualización de los problemas. Estos resultados respaldan a los de Díaz Abahonza (2014), quien considera que con el uso de software de geometría dinámica se pueden obtener beneficios en los procesos de aprendizaje de los alumnos, empleándose de una manera responsable, planeada y bien dirigida.

En el estudio realizado por Briseño Miranda y Guzmán Hernández (2015), que se basó en la teoría de representaciones y en la visualización de objetos matemáticos con la ayuda de la tecnología, los participantes realizaron las actividades en un ambiente de papel y lápiz y, posteriormente en un ambiente tecnológico, hicieron uso de un software de geometría dinámica. Los resultados obtenidos muestran que, al trabajar en ambiente de papel y lápiz, los alumnos, en su mayoría, visualizan las figuras de acuerdo con su percepción, sin hacer uso de las propiedades o descomposición de la figura en partes más simples. En este estudio se pudo observar que la mayoría de los alumnos lograron visualizar los elementos de la parábola, así como las propiedades de cada una de las parábolas presentadas en el examen de conocimiento, concordando con Albuja Brotons y Caballero Campos (2011),

quienes mencionan que el uso de la geometría dinámica favorece la asociación de la parte analítica y geométrica de una ecuación. Sin embargo, se encontró un aspecto de esta investigación que difiere con lo encontrado en el estudio de Albuja Brotons y Caballero Campos. Ellos encontraron que el uso de la geometría dinámica favorecía la resolución de problemas, cuando en esta investigación se observó que los alumnos no fueron capaces de resolver un problema de aplicación.

Para Domingo Coscollola y Marqués Graells (2011), el uso de la tecnología en las matemáticas ha contribuido para que los alumnos presten mayor atención a las clases de matemáticas, aumentando la participación y mayor comprensión. En los resultados de este estudio, se pudo observar una mejoría en la actitud hacia las matemáticas después de trabajar con el software educativo GeoGebra, lo que puede atribuirse al hecho de que los estudiantes se sienten atraídos al trabajar con tecnología, según lo mencionan Lee y Yuan (2010).

Por su parte, López et al. (2013), al estudiar la relación entre las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes y el uso de la tecnología en la enseñanza, encontraron que la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas aumentaba significativamente, registrando así un cambio positivo en las actitudes hacia la materia.

Con base en los resultados en esta investigación, realizada con el propósito de determinar el efecto que produce el usar geometría dinámica sobre el aprendizaje y las actitudes hacia las matemáticas, se encontró un efecto positivo y de gran tamaño del uso de software de geometría dinámica (GeoGebra) en el aprendizaje de los alumnos. Por medio de GeoGebra,

los alumnos pueden aprender conceptos y propiedades de los lugares geométricos. Además, se encontró una diferencia significativa entre la actitud hacia las matemáticas antes y después de usar GeoGebra en el proceso de aprendizaje. Esto muestra que el uso de software de geometría dinámica tiene un efecto positivo sobre la actitud hacia las matemáticas. Sin embargo, no se logró que los alumnos resolvieran de forma eficaz un problema de aplicación haciendo uso del GeoGebra. No se alcanzó un razonamiento profundo empleando el software.

Las sesiones empleadas para el uso del software parecen no ser suficientes para el manejo adecuado del programa, ya que era la primera vez que los alumnos interactuaban con la geometría dinámica.

El uso de la geometría dinámica puede beneficiar el aprendizaje de los estudiantes, ya que su uso mejora la actitud hacia las matemáticas, la cual puede influir positivamente en la comprensión de los contenidos de la asignatura. Cada docente de matemáticas debería contemplar su uso dentro del aula con las herramientas a su alcance.

Referencias

- Albujer Brotons, A. L. y Caballero Campos, M. (2011, enero). *Geometría y tecnología*. [Ponencia] IX Jornades de Xarxes d'Investigació en Docència Universitària: Disseny de bones pràctiques docents en el cotext actual. Universidad de Alicante, España. <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/19885>
- Asunda, P. A. (2010). Manual arts to technology education: Are we ripe for infusing aspects of a green technology into career and technical education constituent subjects? *Career and Technical Education Research*, 35(1), 175-187. <https://doi.org/10.5328/cter35.313>
- Avcı, Z. Y., Keene, K. A., McClaren, L. H., y Vasu, E. S. (2015). An exploration of student attitudes towards online communication and collaboration in mathematics and technology. *International Online Journal of Educational Sciences*, 7(1), 110-126. <https://doi.org/10.15345/iojes.2015.01.010>
- Bhagat, K. K. y Chang, C. Y. (2014). Incorporating GeoGebra into Geometry learning: A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(1), 77-86. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1301a>
- Bosch, H. E., Di Blasi, M. A., Pelem, M. E., Bergero, M. S., Carvajal, L. y Geromini, N. S. (2011). Nuevo paradigma pedagógico para enseñanza de ciencias y matemática. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, 2(3), 131-140. <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-2-nro-3-ano-2011-articulo-13/>
- Briseño Miranda, C. y Guzmán Hernández, J. (2015). Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización geométrica. En *Educación Matemática en las Américas* (vol. 4, pp. 153-164). Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 171-194. <http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-11/numero-11-2/559-200801b>
- Cedillo Ávalos, T. E. (2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria: los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(28), 129-153. <http://www.comie.org.mx/revista/v2018/rmie/index.php/nrmie/article/view/674/674>
- Coffland, D. A. y Strickland, A. W. (2004). Factors related to teacher use of technology in secondary geometry instruction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 23(4), 347-365. <https://www.learnlib.org/primary/p/21757/>
- Cowan, J. E. (2012). Strategies for developing a community of practice: Nine years of lessons learned in a hybrid technology education master's program. *TechTrends*, 56(1), 12-18. <https://doi.org/10.1007/s11528-011-0549-x>
- Díaz Abahonza, E. H. (2014). *El uso de las TICS como medio didáctico para la enseñanza de la geometría* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. <http://bdigital.unal.edu.co/43056/1/8413024.2014.pdf>
- Domingo Coscollola, M. y Marquès Graells, P. (2011). Aulas 2.0 y uso de las TIC en la práctica docente. *Comunicar*, 19(37), 69-175. <https://doi.org/10.3916/C37-2011-03-09>

- Estrada Roca, M. A. y Díez Palomar, F. J. (2011). Las actitudes hacia las matemáticas. Análisis descriptivo de un estudio de caso exploratorio centrado en la educación matemática de familiares. *Revista de Investigación en Educación*, 9(2), 116-132. <http://reined.webs.uvigo.es/index.php/reined/article/view/118/108>
- Gómez Martínez, N. (2012). *Relación entre la capacidad de memoria de trabajo en estudiantes de secundaria del Colegio General Ignacio Zaragoza y su actitud hacia las matemáticas* [Tesis de maestría, Universidad de Morelos]. DSpace. <http://dspace.biblioteca.um.edu.mx/xmlui/handle/20.500.11972/825>
- Hallström, J. y Gyberg, P. (2011). Technology in the rear-view mirror: How to better incorporate the history of technology into technology education. *International Journal of Technology & Design Education*, 21, 3-17. <https://doi.org/10.1007/s10798-009-9109-5>
- Juan, A. A., Steegmann Pascual, C., Huertas, M. A., Martínez, M. J. y Simosa, J. (2011). Teaching mathematics online in the European area of higher education: An instructor's point of view. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(2), 141-153. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2010.526254>
- Lee, C. Y. y Yuan, Y. (2010). Gender differences in the relationship between Taiwanese adolescents' mathematics attitudes and their perceptions toward virtual manipulatives. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(5), 937-950. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9193-8>
- Lehmann, C. H. (2008). *Geometría analítica*. Limusa.
- López, R., Castro, E. y Molina, M. (2013). Actitudes de estudiantes de ingeniería de nuevo ingreso hacia el uso de la tecnología en matemáticas. *PNA*, 8(1), 31-50. <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6121/5439>
- Maduro, R., Bolívar, E., Iturriza, H., Barrios, N., García, H. y Rodríguez, J. (2007). Enseñanza de la matemática desde una perspectiva andragógica. *Educación y Educadores*, 10(2), 51-61. <https://educacionyeducadores.unisabana.edu.co/index.php/eye/article/view/690/773>
- McGarr, O. (2010). Education for sustainable development in technology education in Irish schools: A curriculum analysis. *International Journal of Technology and Design Education*, 20, 317-332. <https://doi.org/10.1007/s10798-009-9087-7>
- Mendoza Contreras, A. (2014). Modelo de Van Hiele y el software GeoGebra para el estudio y comprensión de la geometría analítica en bachillerato. *Revista Electrónica Amiutem*, 2(1), 76-87. <http://revista.amiutem.edu.mx/relecamiumtem/article/view/14>
- Montero, Y. H., Pedroza, M. E., Astiz, M. S. y Vilanova, S. L. (2015). Caracterización de las actitudes de estudiantes universitarios de matemática hacia los métodos numéricos. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 17(1), 88-99. <https://redie.uabc.mx/redie/article/view/357/1009>
- Mosothwane, M. (2012). The role of senior secondary school mathematics teachers in the development of mathematics curriculum in Botswana. *International Journal of Scientific Research in Education*, 5(2), 117-129. http://www.ij sre.com/assets/vol.%2c-5_2_-mosothwane.pdf
- National Council of Teacher of Mathematics. (2003). *Principios para matemáticas escolares*. <http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/Principios Math>
- Norton, S., McRobbie, C. J. y Cooper, T. J. (2000). Exploring secondary mathematics teacher's reasons for not using computers in their teaching: Five cases studies. *Journal of Research on Computing in Education*, 33(1), 87-109. <https://doi.org/10.1080/08886504.2000.10782302>
- O'Brien, C., Aguinaga, N. J., Hines, R. y Hartshorne, R. (2011). Using contemporary technology tools to improve the effectiveness of teacher educators in special education. *Rural Special Education Quarterly*, 30(3), 33-40. <https://doi.org/10.1177/875687051103000305>
- Opazo Correa, V. (2005). Los pda en educación y su utilización en el aprendizaje de la geometría. *Horizontes Educcionales*, 10, 85-93. <https://www.redalyc.org/pdf/979/97917573009.pdf>
- Pierce, R. y Ball, L. (2009). Perceptions that may affect teachers' intention to use technology in secondary mathematics classes. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 299-317. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9177-6>
- Rey, J. A., Quiroga, P. y Martínez, G. C. (2013). Adaptación de un enfoque para el diseño de secuencias didácticas que permitan el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas. *Revista Científica, Edición especial*, 283-287. <https://doi.org/10.14483/23448350.7053>
- Unkefer, L. C., Shinde, S. y McMaster, K. (2009). Integrating advanced technology in teacher education courses. *TechTrends*, 53(3), 80-85. <https://doi.org/10.1007/s11528-009-0287-5>

GEOMETRÍA DINÁMICA Y ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

- Wood, R. y Ashfield, J. (2008). The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics: A case study. *British Journal of Educational Technology*, 39(1), 84-96. <https://doi.org/10.1111/j.14678535.2007.00703.x>
- Yang, D. C. y Tsai, Y. F. (2010). Promoting sixth graders' number sense and learning attitudes via technology-based environment. *Educational Technology & Society*, 13(4), 112-125. <https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.13.4.112>
- Yavuz Mumcu, H. y Cansiz Aktas, M. (2015). Multi-program high school students' attitudes and self-efficacy perceptions toward mathematics. *Eurasian Journal of Educational Research*, 59, 207-226. <https://doi.org/10.14689/ejer.2015.59.12>
- Zembar, I. O. (2008). Pre-service teachers' use of different types of mathematical reasoning in paper-and-pencil versus technology-supported environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(2), 143-160. <https://doi.org/10.1080/00207390701828705>

Recibido: 11 de junio de 2020

Revisado: 30 de octubre de 2020

Aceptado: 1° de diciembre de 2020